

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2025

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VIII razred osnovne škole

1. **(20 poena)** Neka su a, b, c, d realni brojevi tako da je $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 16$. Pokazati da važi nejednakost $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \leq 32$.

Rješenje. Imamo:

$$a^4 \leq a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 16 \Rightarrow a \leq 2.$$

Odnosno:

$$a^4(a - 2) \leq 0 \Rightarrow a^5 \leq 2a^4.$$

Slično važi:

$$b^5 \leq 2b^4, \quad c^5 \leq 2c^4, \quad d^5 \leq 2d^4.$$

Zbir svih nejednakosti daje:

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \leq 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = 2 \cdot 16 = 32.$$

Jednakost važi ako i samo ako je $a = 2, b = c = d = 0$ (do permutacije).

2. **(20 poena)** Dvanaest hljebova podijeljeno je na dvanaest ljudi. Svaki muškarac dobio je po dva hljeba, žena po pola hljeba, a svako dijete po četvrtinu hljeba. Koliko je bilo muškaraca, koliko žena, a koliko djece?

Rješenje: Neka je m broj muškaraca, z broj žena, a d broj djece (m, z, d su nenegativni cijeli brojevi). Prema uslovima zadatka imamo:

$$m + z + d = 12$$

$$2m + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}d = 12$$

Pomnožimo drugu jednačinu sa 4 da bismo se riješili razlomaka:

$$8m + 2z + d = 48$$

Iz druge jednačine odmah primjećujemo da $2 \mid d$, tj. $d = 2k$ za neko k . Dakle,

$$8m + 2z + 2k = 48 \Rightarrow 4m + z + k = 24$$

Pošto je $z = 12 - m - 2k$, imamo da je:

$$4m + (12 - m - 2k) + k = 24 \Rightarrow 3m - k = 12$$

Iz posljednje jednačine slijedi da $3 \mid k$. Kako je $0 \leq d < 12$, imamo da je $0 \leq k < 6$, tj. $k = 0$ ili $k = 3$.

- Ako je $k = 0$, djece nije bilo, dok je bilo četiri muškarca i osam žena.
- Ako je $k = 3$, bilo je šestoro djece, pet muškaraca i jedna žena.

3. **(20 poena)** Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$, gdje je $|AB| = |AC| = 10$. Neka su AH i BD visine ovog trougla. Ako je $|DH|^2 : |AH|^2 = 9 : 16$, odrediti $|BD|$.

Rješenje: Kako je trougao jednakokraki, to će podnožje visine H biti i središte stranice BC . Trougao $\triangle BCD$ je pravougli sa središtem hipotenuze H , pa imamo $|BH| = |HC| = |HD| = x$. Primjenjujući Pitagorinu teoremu na $\triangle AHC$ imamo $|AH|^2 = 10^2 - x^2$. Iz zadate proporcije slijedi:

$$16x^2 = 9(10^2 - x^2)$$

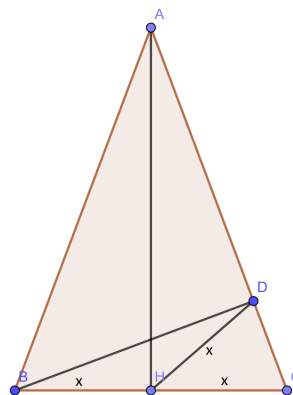
$$16x^2 + 9x^2 = 9 \cdot 100$$

$$25x^2 = 9 \cdot 100$$

$$x^2 = 36$$

Dakle, $x = 6$, pa je $|BC| = |BH| + |HC| = 6 + 6 = 12$ i $|AH| = 8$. Površina trougla $\triangle ABC$ je $\frac{|BD| \cdot |AC|}{2} = \frac{|AH| \cdot |BC|}{2}$ pa kada izrazimo $|BD|$ slijedi:

$$|BD| = \frac{8 \cdot 12}{10} = \frac{48}{5}.$$



4. (20 poena) Data je kružnica sa centrom u tački O poluprečnika $2\sqrt{3}$. Neka je AB prečnik ove kružnice, a AC njena tetiva. Tangente na kružnicu u tačkama A i C se sijeku u tački D . Izračunati površinu četvorougla $ABCD$, ako je poznato da je $\angle ADC = \angle ABC$.

Rješenje: Označimo $\angle AOC = x$, tada je $\angle ABC = \frac{x}{2}$ kao periferijski ugao nad tetivom AC . Trouglovi $\triangle AOC$ i $\triangle OBC$ su jednakokraki, pa je $\angle OAC = \angle OCA = 90^\circ - \frac{x}{2}$ i $\angle OBC = \angle OCB = \frac{x}{2}$. Dalje znamo $\angle OAD = \angle OCD = 90^\circ$ kao ugao između tangente i prečnika, pa je $\angle CAD = \angle ACD = \frac{x}{2}$.

$$\angle ADC = 180 - x = \frac{x}{2} = \angle ABC$$

$$x = 120^\circ$$

Sada uočimo da je $\triangle ABC$ pravougli trougao sa uglovima $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ i da je $\triangle ADC$ jednakostranični trougao. Iz $\triangle ABC$ nalazimo $|AB| = 4\sqrt{3}$, $|BC| = 2\sqrt{3}$ i $|AC| = 6$.

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 15\sqrt{3}$$

5. (20 poena) Odrediti ugao koji zaklopi mala kazaljka za jedan minut i ugao koji zaklopi velika kazaljka za pola sata. Ako trenutno velika kazaljka pokazuje tačno na 12, a mala kazaljka tačno na 5, za koliko minuta će se mala i velika kazaljka prvi put poklopiti nakon tog trenutka?

Rješenje: Mala kazaljka napravi pun krug tj. zaklopi ugao od 360° za 12 sati, odnosno za 720 minuta. Dok za jedan minut zaklopi ugao od $\frac{360^\circ}{720} = 0.5^\circ$. Dok velika kazaljka za pun krug napravi

