

**Prirodno-matematički fakultet**  
**Društvo matematičara i fizičara Crne Gore**

**OLIMPIJADA ZNANJA 2025**

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE  
za IX razred osnovne škole

1. **(8 poena)** Markova porodica je u restoranu za ručak pojela dvije pice, tri sendviča i četiri pašte, i platili su 53 evra. Anina porodica je u istom restoranu ručala pet pica, šest sendviča i sedam pašti, i platili su 107 evra.  
Za koliko je pica skuplja od pašte?

**Rješenje:** Neka je cijena pice  $x$ , sendviča  $y$  a pašte  $z$ . Tada je

$$2x + 3y + 4z = 53$$

$$5x + 6y + 7z = 107$$

Množimo prvu jednačinu sa  $-2$  i dodajemo je drugoj, pa dobijamo

$$x - z = 1.$$

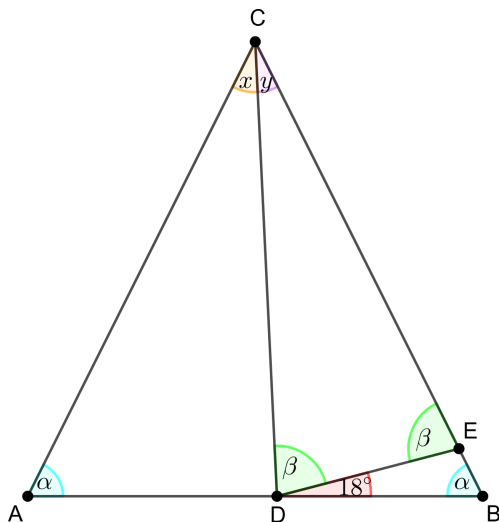
Dakle, pica je za evro skuplja od pašte.

2. **(23 poena)** Prirodan broj  $M$  smo predstavili kao proizvod prostih brojeva. Zatim smo svakom od tih prostih brojeva dodali 1, i nakon množenja tako dobijenih brojeva smo dobili broj  $N$ . Dalje, predstavili smo broj  $N$  kao proizvod prostih brojeva, svakom od njih dodali 1 i množenjem tako dobijenih brojeva dobili broj  $P$ . Ako je  $N$  djeljivo sa  $M$ , dokazati da je  $P$  djeljiv sa  $N$ .

**Rješenje:** Neka je  $M = p_1 p_2 \dots p_k$ . Tada je  $N = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_k + 1)$ . Kako je  $N$  djeljiv sa  $M$ , to je faktorizacija broja  $N = p_1 p_2 \dots p_k q_1 q_2 \dots q_l$ . Tada je  $P = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_k + 1)(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_l + 1) = N(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_l + 1)$ , pa zaključujemo da  $N$  dijeli  $P$ .

3. (23 poena) Dat je jednakokraki trougao  $ABC$ . Na njegovoj osnovi  $AB$  odabrana je tačka  $D$ , a na kraku  $BC$  tačka  $E$  takva da je  $CD = CE$ . Ako je  $\angle EDB = 18^\circ$ , naći  $\angle DCA$ .

**Rješenje:** Označimo  $\angle ABC = \angle BAC = \alpha$ ,  $\angle CDE = \angle DEC = \beta$ ,  $\angle ECD = y$ ,  $\angle DCA = x$ . Znamo da je  $x + y = 180^\circ - 2\alpha$  i  $y = 180^\circ - 2\beta$ , jer su trouglovi  $ABC$  i  $DEC$  jednakokraki. Pored toga  $\alpha + 18^\circ + 180^\circ - \beta = 180^\circ$ , odnosno  $\beta - \alpha = 18^\circ$ . Sada je  $x + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ - 2\alpha$ , odnosno  $x = 2\beta - 2\alpha$ , pa je  $x = 36^\circ$ .



□

4. (23 poena) Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednačina

$$\frac{1}{2025} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

**Rješenje:** Sređivanjem izraza dobijamo

$$\frac{1}{2025} = \frac{x+y}{xy}$$

$$xy = 2025x + 2025y$$

$$xy - 2025x - 2025y = 0$$

$$x(y - 2025) - 2025y + 2025^2 = 2025^2$$

$$x(y - 2025) - 2025(y - 2025) = 2025^2$$

$$(x - 2025)(y - 2025) = 2025^2$$

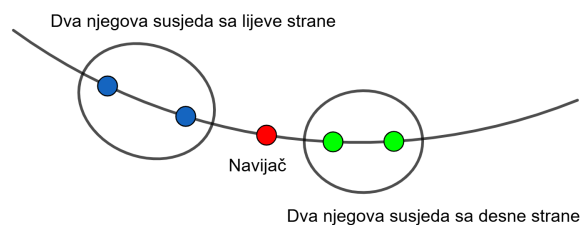
Broj 2025 se faktoriše na  $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ , pa je  $2025^2 = 3^8 \cdot 5^4$ . Odavde slijedi da broj  $x - 2025$ , odnosno  $x$ , možemo izabrati na  $9 \cdot 5 \cdot 2 = 90$  (množimo sa 2 zbog znaka, jer  $x - 2025$  i  $y - 2025$  moraju biti ili oba pozitivni ili oba negativni) načina, što je rješenje zadatka. (Očigledno, izbor broja  $x - 2025$  nam fiksira i  $y - 2025$ .)

5. (**23 poena**) Za okruglim stolom je 105 mjesta. Potrebno je za sto smjestiti navijače klubova Budućnost, Lovćen i Mladost (svaki navijač navija samo za jedan klub!) tako da važe svi sljedeći uslovi:

- (1) Među svaka tri uzastopna navijača za stolom, bar jedan navija za Mladost;
- (2) Među svakih pet uzastopnih navijača za stolom, bar jedan navija za Budućnost;
- (3) Za svakog navijača važi da je među njegova četiri susjeda (dva sa lijeve i dva sa desne strane, vidjeti sliku), bar jedan navijač Lovćena.

Dokazati da, pri ovakvom smještanju:

- a) Broj navijača Lovćena za stolom mora biti paran.
- b) Za stolom ne može biti isti broj navijača klubova Budućnost i Mladost.



**Rješenje:** a) Navijače kluba Budućnost ćemo označiti sa B, kluba Lovćen sa L a kluba Mladost sa M.

Posmatrajmo navijača kluba Lovćen, nazovimo ga Jovan, i četiri njegova susjeda (dva sa lijeve i dva sa desne strane). Među njima je bar još jedan navijač kluba Lovćen. Pretpostavimo da je on sjedi lijevo od Jovana.

Ako on sjedi neposredno do Jovana, onda lijevo od njega mora sjedjeti navijač kluba Mladost (uslov 1). Na pozicijama desno od Jovana, Jovanov susjed mora navijati za Mladost (uslov 1), a sljedeći navijač mora navijati za Budućnost (uslov 2). Dakle, mogući poredak je: B M Jovan (L) L M. Ako nastavljamo da smještamo navijače lijevo od Jovana, moramo smjestiti navijača Budućnosti (uslov 2), pa imamo poredak B M Jovan(L) L M B.

Ako navijač Lovćena ne sjedi neposredno do Jovana, između njega i Jovana mora sjedjeti navijač kluba Mladost (uslov 1), a desno od Jovana moraju biti jedan navijač kluba Mladost i jedan navijač kluba Budućnost (uslovi 1 i 2). Dakle, mogući poretki su: M B Jovan(L) M L i B M Jovan(L) M L. Nastavljamo da smještamo navijače lijevo od Jovana. U slučaju M B Jovan(L) M L, lijevo možemo nastaviti smještanje sa B M ili M B, a u slučaju B M Jovan(L) M L moramo nastaviti sa B M. Dakle, mogući poretki su M B Jovan(L) M L M B, M B Jovan(L) M L B M, B M Jovan(L) M L B M.

Primijetimo da navijače Lovćena moramo smještati u paru, tako da navijači iz jednog para sjede neposredno jedan do drugog ili je između njih jedan navijač Mladosti, a sa obje strane para sjede bar po dva navijača drugih klubova. Dakle, možemo smjestiti paran broj navijača Lovćena.

b) Ako bi smjestili za sto isti broj navijača Budućnosti i Mladosti,  $b$  i  $m$  redom, i ako sa  $l$  označimo broj navijača Lovćena za stolom, dobili bi  $b + m + l = 2b + l$ , a kako je  $l$  paran broj, onda je  $2b + l$  paran broj, što je nemoguće (za stolom je 105 mjesta).

**Vrijeme rada: 180 minuta.**

**Prvi zadatak se boduje sa maksimalno 8 bodova, a ostali sa maksimalno 23 boda.**

**Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.**